7. Gráfszínezés

**Gráfszínezésen két fajta színezést tudunk érteni.**

* Csúcsszínezés: A gráf csúcsaihoz színeket rendelünk úgy, hogy a szomszédos csúcsok nem kaphatnak azonos színt. (akkor szomszédosak, ha van közös élük)
* Élszínezés: A gráf éleihez színeket rendelünk úgy, hogy olyan élek, amelyeknek van közös végpontjuk, nem kaphatnak azonos színt.
* Cél: minél kevesebb szín használata.
* Színosztály: az azonos színű csúcsok halmazát színosztálynak nevezzük.

**Kromatikus szám:**

* A gráf csúcsainak kiszínezéséhez szükséges legkevesebb szín száma.
* Jele: χ(G)
* A gráf kromatikus száma χ(G)=k, ha a G kiszínezhető k színnel, de k-1 színnel már még nem.
* megfigyelések:
  + ha G tartalmaz hurokélt, akkor nem színezhető
  + egy színosztályon belül lévő csúcsok között nem fut él

**Klikkszám:**

* Klikk: a G teljes részgráfja
* Klikkszám: A gráfban a maximális teljes részgráf pontjainak (legnagyobb klikkjének) száma, azaz 𝜔(𝐺)=k, ha G-ben van k méretű, de nincs k+1 méretű klikk.
* Jele: 𝜔(𝐺)

**Alsó és felső korlát a kromatikus számra**

* Alsó korlát:
  + 𝜔(𝐺) <= χ(G) (alsó becslés a kromatikus szám)
  + bizonyítás: a G gráf színezésekor a klikk csúcsait is színezzük, amiben minden csúcs össze van kötve mindegyikkel, ezért mindegyiket másik színűre kell festeni.
* Felső korlát:
  + χ(G) <= ∆(G) + 1, ahol ∆(G) =max d(x) xEV(G) (a legnagyobb fokszámú csúcs ∆(G))
  + bizonyítás: Mohó színezés. Sorba nézem a csúcsokat. 1.csúcs->1 szín, 2.csúcs-> ha nem szomszédos az elsővel, akkor ugyanaz, ha szomszédos bevezetek egy új színt. Minidig figyelem a szomszédokat, csak akkor vezetek be új színt, ha minden színnel szomszédos. Tfh ∆(G)=27, akkor ennél nagyobb fokszámú csúcs nincs, ha pont ezt a maximális fokszámú csúcsot nézem, és az összes szomszédja különböző színű akkor ennek is másmilyennek kell, hogy legyen, ezért legrosszabb esetben 28 szín kell.

Síkgráfok kromatikus száma:

négyszín tétel: Ha G egyszerű és síkbarajzolható, akkor χ(G)<=4

ötszíntétel: Ha G egyszerű és síkbarajzolható, akkor χ(G)<=5

* Lemma: Ha a Gráf síkba rajzolható és egyszerű, akkor
* bizonyítás: